Herkansing Algebra, 12 augustus 2002, 9:00–12:00

1 Welke getallen komen voor als orde van een element van $(\mathbb{Z}/900\mathbb{Z})^*$? (10 punten)

2 Probeer zoveel mogelijk verschillende surjectieve homomorfismen van $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ te maken.

Hoeveel ondergroepen van index 2 heeft $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Hoeveel zijn dit er op isomorfie na? (5+5+5 punten)

3 Construeer een ondergroep van S_5 bestaande uit precies 8 elementen.

Leg uit waarom dit onmogelijk is binnen A_5. (15+5 punten)

4 Voor $\tau \in A_4$ duiden we met $\gamma_\tau : A_4 \to A_4$ het automorfisme aan dat gegeven wordt gegeven door $\gamma_\tau(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$ voor alle $\sigma \in A_4$.

(a) Bepaal alle conjugatieklassen en het centrum van A_4.

(b) Voor gegeven $n \in \mathbb{N}$, hoeveel elementen van orde n heeft A_4?

(c) Bepaal alle normaaldelers van A_4.

(d) Bepaal alle automorfismen φ van A_4. Hoeveel ervan zijn van de vorm $\varphi = \gamma_\tau$ met $\tau \in A_4$?

(20 punten)

5 Bekijk de ondergroep $G := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}\}$ van $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(a) Definiëer een bewerking $\star$ op de verzameling $H := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ zodat

$$\psi : \begin{array}{ccc} G & \to & H \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) & \mapsto & \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \end{array}$$

een homomorfisme van groepen wordt.
(Hierbij is het handig om te gebruiken dat ψ surjectief is.)

(b) Laat zien dat $(H, \star)$ niet abels is.

(c) Bepaal het neutrale element van $(H, \star)$ en de kern van ψ.

(d*) Bewijs dat het centrum van G gelijk is aan de kern van ψ.

(e*) Wat is het centrum van $(H, \star)$?

(25 punten)

6 Welk cijfer denk je voor dit tentamen te hebben behaald? (10 punten)